RODOLFO GUIDOBONO

CURSO DE MECÁNICA TEÓRICA
J. GARCÍA - EJERCICIO CAP. 39

HOJA Nº 1
FECHA 22/11/19

Demostrar que $\frac{d^3k}{\omega}$ es manifiestamente invariante Lorentz

$$\frac{d^3K}{\omega} = \frac{d^3K'}{\omega'} \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}$$

Dado el cuadrivector $K^\mu = (\omega, K^1, K^2, K^3)$ se aplica la transformación de Lorentz obteniendo $K^{\mu'} = (\omega', (K^1)', (K^2)', (K^3)')$

$$\begin{cases} \omega' = \gamma(\omega - \beta(K^1)) \\ (K^1)' = \gamma(-\beta\omega + (K^1)) \\ (K^2)' = K^2 \longrightarrow d(K^2)' = dK^2 \\ (K^3)' = K^3 \longrightarrow d(K^3)' = dK^3 \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

como $k_j = -k^j \Rightarrow (k_j)^2 = (k^j)^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{(K^1)^2 + (K^2)^2 + (K^3)^2}$

$$\frac{d^3k}{\omega} = \frac{1}{\omega} dk^1 dk^2 dk^3$$

$$\frac{d(K^2)'}{dK^1} = \gamma\left(1 - \beta\frac{d\omega}{dK^1}\right)$$

$$\frac{d\omega}{dK^1} = \frac{1}{2\sqrt{(K^1)^2+(K^2)^2+(K^3)^2}} \cdot 2K^1 = \frac{K^1}{\sqrt{(K^1)^2+(K^2)^2+(K^3)^2}} = \frac{K^1}{\omega}$$

$$\frac{d(K^1)'}{dK^1} = \gamma\left(1 - \beta\frac{K^1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\left[\gamma(\omega - \beta K^1)\right] = \frac{1}{\omega}\omega'$$

$$\frac{d(K^1)'}{\omega'} = \frac{dK^1}{\omega}$$

$$\frac{d^3K}{\omega} = \frac{d(K^1)'}{\omega'}(dK^2)'(dK^3)'$$

$$\boxed{\frac{d^3K}{\omega} = \frac{d^3(K')}{\omega'}}$$

NOTA